

© International Baccalaureate Organization 2026

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2026

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2026

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Mathematik: Analyse und Ansätze

Leistungsstufe

3. Klausur

20. Mai 2026

Zone A Nachmittag | **Zone B** Nachmittag | **Zone C** Nachmittag

1 Stunde 15 Minuten

Hinweise für die Schüler und Schülerinnen

- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze LS** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[55 Punkte]**.

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite. Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, müssen von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

1. [Maximale Punktzahl: 26]

In dieser Fragestellung sollen Sie ein Glücksspiel untersuchen.

Bei diesem Glücksspiel versuchen die Teilnehmenden, in mehreren Runden Bonbons aus einem Korb zu gewinnen. Die Spielregeln lauten wie folgt:

- Der Spieler beginnt das Spiel mit mindestens einem Bonbon.
- Zu Beginn einer jeden Runde dreht der Spieler ein Glücksrad.
- Wenn das Glücksrad „Gewinn“ anzeigt, gewinnt der Spieler ein Bonbon aus dem Korb, andernfalls muss er ein Bonbon in den Korb hineinlegen.
- Das Spiel wird so lange gespielt, bis entweder der Spieler alle Bonbons aus dem Korb gewonnen hat oder er keine Bonbons mehr hat.

Betrachten Sie zunächst den Fall, dass es insgesamt drei Bonbons im Spiel gibt.

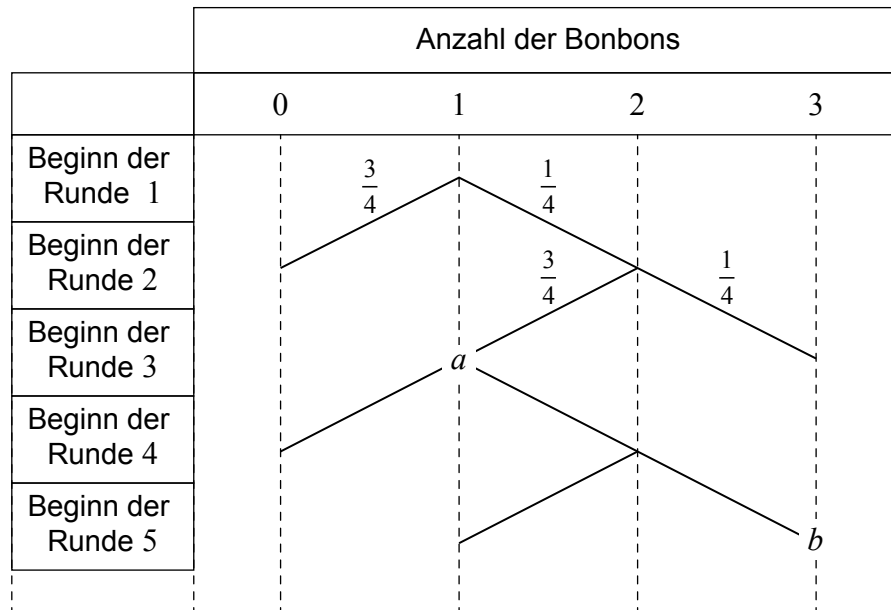
Fiona beginnt das Spiel mit einem Bonbon und es befinden sich zwei Bonbons im Korb, die sie gewinnen kann.

Die Wahrscheinlichkeit, in einer Runde einen „Gewinn“ zu erzielen, ist immer $\frac{1}{4}$, unabhängig von jeder anderen Runde.

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 1)

Das folgende Diagramm zeigt die mögliche Anzahl der Bonbons, die Fiona zu Beginn einer jeden Runde hat und die möglichen Ergebnisse der ersten Runden.



Wenn Fiona in Runde 1 gewinnt, hat sie zu Beginn der Runde 2 genau zwei Bonbons.

Wenn sie Runde 1 verliert, hat sie zu Beginn von Runde 2 keine Bonbons mehr und das Spiel endet.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Fiona zu Beginn von Runde 3 genau ein Bonbon hat, ist a und die Wahrscheinlichkeit, dass sie zu Beginn von Runde 5 drei Bonbons hat, ist b .

(a) (i) Zeigen Sie, dass $a = \frac{3}{16}$. [1]

(ii) Finden Sie den Wert von b . [2]

Zu Beginn von Runde 5 hat Fiona genau ein Bonbon.

(b) Notieren Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie nach zwei weiteren Runden noch ein Bonbon hat. [2]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 1)

Betrachten Sie nun den Fall, dass es insgesamt w Bonbons im Spiel gibt.

R_n sei die Wahrscheinlichkeit, dass Fiona am Ende alle w Bonbons hat, wenn sie eine Runde mit n Bonbons beginnt.

Wenn Fiona eine Runde ohne Bonbons beendet, also $n = 0$, dann ist die Wahrscheinlichkeit R_0 , dass sie am Ende alle Bonbons hat gleich Null, und das Spiel ist zu Ende.

Für $n > 0$ gilt: Wenn Fiona die nächste Runde gewinnt, hat sie $n + 1$ Bonbons, und die Wahrscheinlichkeit, dass sie am Ende alle w Bonbons hat, ist dann R_{n+1} .

Wenn Fiona aber die nächste Runde verliert, hat sie entsprechend $n - 1$ Bonbons, und die Wahrscheinlichkeit, dass sie am Ende alle w Bonbons hat, ist dann R_{n-1} .

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Glücksrad „Gewinn“ anzeigt, sei nun p , mit $0 < p < 1$, und die Wahrscheinlichkeit, dass es „Kein Gewinn“ anzeigt, ist q , mit $q = 1 - p$ und $p \neq q$.

Zu Beginn einer jeden Runde gilt für R_n :

$$R_n = qR_{n-1} + pR_{n+1}, \text{ mit } n > 0.$$

Betrachten Sie den Fall für $w = 4$ und $p = \frac{1}{4}$.

(c) Notieren Sie einen Ausdruck für R_2 in Abhängigkeit von R_1 und R_3 . [1]

(d) Die Wahrscheinlichkeit, dass Fiona das Spiel gewinnt, wenn sie eine Runde mit genau einem Bonbon beginnt, beträgt $R_1 = 0,025$. Wenn sie eine Runde mit genau drei Bonbons beginnt, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie das Spiel gewinnt $R_3 = 0,325$.

Finden Sie den Wert von R_2 . [2]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 1)

Betrachten Sie für die folgenden Teile dieser Fragestellung den Fall, dass es insgesamt w Bonbons im Spiel gibt und dass die Wahrscheinlichkeit für einen „Gewinn“ p ist.

(e) Drücken Sie R_n als $(p + q)R_n$ aus und zeigen Sie damit, dass $R_{n+1} - R_n = \frac{q}{p}(R_n - R_{n-1})$. [2]

(f) (i) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit $R_2 - R_1$ in Abhängigkeit von p , q und R_1 . [1]

(ii) Zeigen Sie, dass $R_3 - R_2 = \left(\frac{q}{p}\right)^2 R_1$. [2]

(iii) Deduzieren Sie einen Ausdruck für $R_n - R_{n-1}$ in Abhängigkeit von n , p , q und R_1 . [1]

(g) (i) Zeigen Sie unter Berücksichtigung von $(R_2 - R_1) + (R_3 - R_2) + (R_4 - R_3) + \dots + (R_n - R_{n-1})$, oder auf andere Weise, dass gilt:

$$R_n = R_1 \left(1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} \right). \quad [4]$$

(ii) Zeigen Sie unter Nutzung der Vorarbeit, dass $R_n = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^w}$, wenn $R_1 = \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^w}$ gilt. [4]

Es gibt jetzt eine große Anzahl von Bonbons im Spiel.

Fiona beginnt ein Spiel mit m Bonbons, und es gilt $p = 0,495$.

Sobald sie 10 weitere Bonbons erlangt hat, hat sie alle Bonbons und das Spiel endet.

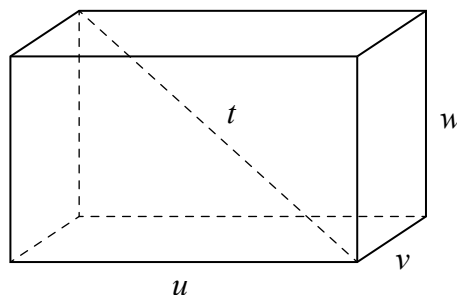
(h) Bestimmen Sie den Mindestwert von m so, dass Fiona mit einer Chance von mindestens 80% 10 weitere Bonbons gewinnen kann. [4]

2. [Maximale Punktzahl: 29]

In dieser Frage sollen Sie den Zusammenhang zwischen komplexen Zahlen und einem Quader untersuchen, dessen Kantenlängen und Raumdiagonale ganzzahlige Längen haben. Ein solcher Quader wird im Englischen als „Pythagorean Box“ bezeichnet und wird hier „pythagoreischer Quader“ genannt.

Ein pythagoreischer Quader wird mit $PB(u, v, w, t)$ bezeichnet und hat die Seitenlängen $u \times v \times w$ sowie eine Raumdiagonale der Länge t mit $u, v, w, t \in \mathbb{Z}^+$. Dies ist im folgenden Diagramm dargestellt.

Abbildung nicht maßstabsgerecht



- (a) Finden Sie den Wert von t für den Fall $u = 9$, $v = 2$ und $w = 6$. [2]

Die komplexen Zahlen z_1 und z_2 bilden einen pythagoreischen Quader, $PB(u, v, w, t)$, wenn

$$u = 2 \operatorname{Re}(z_1 z_2^*), \quad v = 2 \operatorname{Im}(z_1 z_2^*), \quad w = |z_1|^2 - |z_2|^2 \quad \text{und} \quad t = |z_1|^2 + |z_2|^2, \quad \text{mit } u, v, w, t \in \mathbb{Z}^+.$$

Umgekehrt gilt für jeden pythagoreischen Quader, $PB(u, v, w, t)$, dass es zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 gibt, welche die oben definierten Bedingungen für u, v, w und t erfüllen.

Betrachten Sie die beiden komplexen Zahlen $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$, mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$.

- (b) (i) Finden Sie einen Ausdruck für $z_1 z_2^*$ in Abhängigkeit von a, b, c und d . [2]

- (ii) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit einen Ausdruck für v in Abhängigkeit von a, b, c und d . [1]

- (c) Betrachten Sie den Fall, dass $z_1 = 3 + 7i$ und $z_2 = c + 6i$ einen pythagoreischen Quader bilden.

- (i) Zeigen Sie, dass gilt: $v = 14c - 36$. [1]

- (ii) Zeigen Sie, dass 3 und 4 die einzigen möglichen Werte für c sind. [4]

- (iii) Es sei $c = 4$. Finden Sie die zugehörigen Werte von u, v, w und t . [5]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

Es gibt drei pythagoreische Quader mit einer Raumdiagonale der Länge 23.

- (d) Es gilt: $23 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2$. Bestimmen Sie die Kantenlängen **eines** dieser pythagoreischen Quader. [6]

Die Längen der Kanten und der Raumdiagonale des pythagoreischen Quaders, $PB(u, v, w, t)$,

können zur Bildung einer komplexen Zahl z genutzt werden, für die $z = \frac{u + vi}{t - w}$ gilt.

Betrachten Sie den pythagoreischen Quader $PB(26, 38, 43, 63)$.

- (e) Zeigen Sie, dass für diesen pythagoreischen Quader $z = \frac{13 + 19i}{10}$ ist. [1]

Die komplexe Zahl z kann auch als $\frac{z_1}{z_2}$ geschrieben werden, wobei z_1 und z_2 den

pythagoreischen Quader $PB(26, 38, 43, 63)$ bilden.

$\frac{z_1}{z_2}$ lässt sich als $\frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$ ausdrücken.

- (f) (i) Betrachten Sie $t - w$ und zeigen Sie $c^2 + d^2 = 10$. [2]
 (ii) Es gelte $c > d$. Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit z_1 und z_2 . [5]
-

Disclaimer:

Die bei IB-Prüfungen verwendeten Inhalte entstammen häufig Originalwerken von Dritten. Die in ihnen geäußerten Meinungen sind die der jeweiligen Autoren oder Autorinnen und/oder Herausgeber und Herausgeberinnen und geben nicht notwendigerweise die Ansichten von IB wieder. Unternehmen, Produkte oder Personen, die in der Vorlage genannt werden, sind manchmal fiktiv; jede Ähnlichkeit mit tatsächlichen Einrichtungen ist rein zufällig. Alle enthaltenen anerkannten Marken™ oder registrierten Marken® werden nur zur Veranschaulichung verwendet, und die Verwendung impliziert keine Zugehörigkeit zum International Baccalaureate oder eine Befürwortung durch dieses.